Оглавление

Глава 1

Основные понятия комбинаторики

Определение 1.0.1 (Правило суммы)**.** Если объект A можно выбрать m способами, объект B можно выбрать n способами, и множества способов выбора A и B не пересекаются ($A \cap B = \emptyset$), то выбор "либо A, либо B"можно осуществить $m + n$ способами.

Определение 1.0.2 (Правило произведения)**.** Если объект A можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами независимо от выбора A, то упорядоченную пару (A, B) можно выбрать $m \times n$ способами.

1.1 Перестановки

Определение 1.1.1. Перестановкой n различных элементов называется любое упорядоченное расположение этих элементов.

Теорема 1.1.1. Если среди n элементов есть одинаковые: k_1 элементов первого типа, ..., k_m элементов m-го типа, причём $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$, то число различных перестановок этих элементов равно: $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$

1.2 Размещения

Определение 1.2.1. Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется упорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из данных n элементов.

Теорема 1.2.1. Количество всех размещений из n элементов по k равно: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Определение 1.2.2. Размещением с повторениями из n элементов по k называется упорядоченный набор из k элементов, каждый из которых может быть любым из данных n элементов.

Теорема 1.2.2. Количество всех размещений с повторениями из n элементов по k равно: n^k

1.3 Сочетания

Определение 1.3.1. Сочетанием из n элементов по k ($k \leq n$) называется неупорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из данных n элементов.

Теорема 1.3.1. Количество всех сочетаний из n элементов по k равно: $\binom{n}{k}$ (или же $\frac{n!}{k!(n-k)!}$)

Определение 1.3.2. Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется неупорядоченный набор из k элементов, каждый из которых может быть любым из данных n типов.

Теорема 1.3.2. Количество всех сочетаний с повторениями из n элементов по k равно: $\binom{n+k-1}{n-1}$

Глава 2

Бином Ньютона и свойства биномиальных коэффициентов

2.1 Бином Ньютона

Теорема 2.1.1 (Бином Ньютона)**.** Для любых действительных a, b и натурального n:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Доказательство. Рассмотрим произведение:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ множителей}}$$

Раскрывая скобки, получим слагаемые вида $a^{n-k}b^k$. Коэффициент при $a^{n-k}b^k$ равен количеству способов выбрать k множителей, из которых берётся b (из оставшихся $n-k$ множителей берётся a). Это число равно $\binom{n}{k}$.

2.2 Свойства биномиальных коэффициентов

Теорема 2.2.1. Для биномиальных коэффициентов справедливо:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
5. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Теорема 2.2.2. Для любых натуральных m, n, k: $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$

Доказательство. Рассмотрим множество из m мужчин и n женщин. Выберем k человек. Справа — общее количество способов. Слева — сумма по количеству мужчин в выборке: если выбрано i мужчин, то женщин выбрано $k-i$.

Теорема 2.2.3. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ для $k \geq 1$

Доказательство. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Глава 3

Формула включений-исключений, метод шаров и перегородок

3.1 Формула включений-исключений

Определение 3.1.1. Объединением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. Обозначается $A \cup B$.

Определение 3.1.2. Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат одновременно и A, и B. Обозначается $A \cap B$.

Теорема 3.1.1. Для конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливо:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент x, принадлежащий ровно m множествам из $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Его вклад в правую часть равен: $m - C_m^2 + C_m^3 - C_m^4 + \cdots + (-1)^{m+1}C_m^m = 1$ так как известно тождество: $C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \cdots + (-1)^m C_m^m = 0$. Таким образом, каждый элемент учитывается ровно один раз.

3.2 Метод шаров и перегородок

Определение 3.2.1. Метод шаров и перегородок — это комбинаторный метод для подсчёта числа способов разложить n идентичных шаров по k различным ящикам.

Задача 3.1. Сколькими способами можно разложить n идентичных шаров по k различным ящикам?

Решение. Представим n шаров в виде n звёздочек: $\underbrace{* * * \cdots *}_{n}$. Чтобы разделить их на k групп, нужно поставить $k-1$ перегородку.

Всего у нас n шаров и $k-1$ перегородка — $n+k-1$ объектов. Нужно выбрать позиции для $k-1$ перегородки среди $n+k-1$ позиций (или, что эквивалентно, выбрать позиции для n шаров). Тогда число способов: $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$

Задача 3.2. Сколькими способами можно разложить n идентичных шаров по k различным ящикам так, чтобы каждый ящик содержал хотя бы один шар?

Решение. Сначала положим по одному шару в каждый ящик (чтобы гарантировать непустоту). Останется $n-k$ шаров для свободного распределения по k ящикам, причём теперь пустые ящики разрешены (так как в каждом уже есть хотя бы один шар). Тогда число способов: $\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

Глава 4

Задачи

1. Сколькими способами можно разложить 100 одинаковых шаров по 10 различным ящикам так, чтобы в первых пяти ящиках суммарно было не менее 60 шаров?

2. Сколько различных натуральных делителей имеет число 2.495.227.291.609?

3. Сколькими способами можно представить число 1.732.635.801.288 в виде произведения двух натуральных чисел, учитывая порядок (т.е. $a \times b$ и $b \times a$ считаются разными, если $a \neq b$)?

4. Сколько существует перестановок чисел от 1 до 15, в которых нет двух последовательных чисел, идущих в натуральном порядке (т.е. запрещены подряд идущие числа вида $x, x+1$)?

5. Сколько существует способов выбрать из множества $\{1, 2, \ldots, 123.456.789\}$ три числа так, чтобы их попарные разности были все различны? Так как ответ может быть очень большим, найдите его остаток при делении на $10^9 + 7$.

6. Сколько существует пятнадцатизначных чисел, у которых сумма цифр равна 26?