Оглавление

Блины

На сковороде одновременно можно жарить не более k блинов. Каждый блин нужно обжарить с двух сторон. Одна сторона жарится 1 минуту. Снимать блин можно только после готовности обеих сторон. Найти минимальное время для n блинов.

Всего нужно обжарить $2n$ сторон. За одну минуту можно обжарить не более k сторон, поэтому нижняя граница времени — $\lceil 2n/k \rceil$.

Если $n \le k$, то за первую минуту кладём все n блинов, обжариваем одну сторону. За вторую минуту переворачиваем и обжариваем вторую сторону. При этом $\lceil 2n/k \rceil$ может равняться 1, поэтому ответ — максимум из 2 и $\lceil 2n/k \rceil$.

Если $n > k$, то нижняя оценка достигается, и ответ равен $\lceil 2n/k \rceil$.

Общая формула: $\max\left(2,\ \left\lceil \frac{2n}{k} \right\rceil\right)$.

Упаковки товара

В магазине продаётся товар в упаковках двух размеров: a и b штук. Упаковки можно покупать в любом количестве. Какое наибольшее количество единиц товара нельзя приобрести, используя только эти два размера? a и b взаимно просты.

Это задача о "числах Фробениуса"для двух чисел. Докажем, что наибольшее непредставимое число равно $ab - a - b$.

Лемма 1. Число $ab - a - b$ нельзя представить в виде $ax + by$ с $x, y \ge 0$. Предположим противное: $ab-a-b = ax+by$. Тогда $ab-a-b = ax+by$. Перенесём: $ab-a-b-ax = by$. Вынесем a: $a(b-1-x) = b(y+1)$. Левая часть делится на a, значит и правая делится на a. Так как $\gcd(a, b) = 1$, то $y + 1$ делится на a, то есть $y+1 \ge a$. Тогда $y \ge a-1$. Подставим в исходное: $ab-a-b = ax+by \ge ax+b(a-1) \ge b(a-1) = ab-b$. Получаем $ab - a - b \ge ab - b$, откуда $-a \ge 0$, противоречие.

Лемма 2. Любое число $N > ab - a - b$ представимо. Рассмотрим остатки от деления на a. Числа $0, b, 2b, \ldots, (a-1)b$ дают все различные остатки по модулю a (так как $\gcd(a, b) = 1$). Для любого N существует $y \in [0, a-1]$, такое что $N \equiv yb \pmod{a}$. Тогда $N - yb$ делится на a и неотрицательно, если $N \ge (a-1)b$. Но нам нужно $N > ab - a - b$, а $(a-1)b = ab - b$, что больше $ab - a - b$ при $a > 1$. Значит, для любого $N > ab - a - b$ найдётся $y \le a - 1$, такой что $N - yb \ge 0$ и делится на a. Тогда $x = (N - yb)/a$ неотрицательно, и $N = ax + by$.

Таким образом, наибольшее непредставимое число — $ab - a - b$.

Сумма кубов нечётных чисел

Дано натуральное число N. Найдите остаток от деления суммы $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2N-1)^3$ на $10^9 + 7$.

Известна формула суммы кубов первых n натуральных чисел: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Сумма кубов первых $2N$ натуральных чисел равна:

$$S_{2N} = \left(\frac{2N(2N+1)}{2}\right)^2 = (N(2N+1))^2.$$

Сумма кубов чётных чисел: $2^3 + 4^3 + \cdots + (2N)^3 = 8 \cdot (1^3 + 2^3 + \cdots + N^3) = 8\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 = 2N^2(N+1)^2$.

Вычитая из суммы первых $2N$ чисел сумму чётных, получаем сумму нечётных:

$$S_{\text{нечёт}} = S_{2N} - S_{\text{чёт}} = N^2(2N+1)^2 - 2N^2(N+1)^2.$$

Упростим: вынесем N^2:

$$S_{\text{нечёт}} = N^2\left((2N+1)^2 - 2(N+1)^2\right) = N^2(4N^2 + 4N + 1 - 2N^2 - 4N - 2) = N^2(2N^2 - 1).$$

Таким образом, искомая сумма равна $N^2(2N^2 - 1)$. Вычисляем по модулю $10^9 + 7$.

Количество нулей в конце факториала

Для целого неотрицательного числа N требуется найти количество конечных нулей в десятичной записи числа $N!$.

Количество нулей в конце $N!$ равно степени 10 в разложении $N!$ на простые множители. Поскольку $10 = 2 \cdot 5$, а двоек в разложении всегда больше, чем пятёрок, количество нулей равно показателю степени 5 в $N!$. Этот показатель вычисляется по формуле Лежандра:

$$\left\lfloor \frac{N}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{125} \right\rfloor + \dots$$

Суммируем, пока $N \geq 5$.

Нечётные числа в треугольнике Паскаля

В N-й строке треугольника Паскаля находятся числа $\binom{N}{0}, \binom{N}{1}, \dots, \binom{N}{N}$. Требуется определить количество нечётных чисел в этой строке.

По теореме Люка, $\binom{N}{k}$ нечётно тогда и только тогда, когда в двоичной записи каждый бит числа k не превосходит соответствующий бит числа N (то есть $k \mathbin{\&} (N-k) = 0$). Иными словами, все единичные биты k должны быть подмножеством единичных битов N. Количество таких k равно $2^{\mathrm{popcount}(N)}$, где $\mathrm{popcount}(N)$ — количество единиц в двоичной записи N. Это и есть ответ.

Случайные команды

n участников разбили на m команд (в каждой команде хотя бы один участник). После соревнований каждая пара участников из одной команды стала друзьями. Найдите минимальное и максимальное возможное количество пар друзей.

Максимум достигается, когда все участники собраны в одной команде, а остальные $m-1$ команд содержат по одному человеку. Тогда в большой команде $\binom{n-m+1}{2}$ пар.

Минимум достигается при максимально равномерном распределении участников по командам. Пусть $x = \lfloor n/m \rfloor$, $r = n \bmod m$. Тогда r команд будут иметь $x+1$ участника, а остальные $m-r$ команд — x участников. Количество пар в команде из k человек равно $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$. Суммируя по всем командам, получаем минимальное количество пар.

Теннисный Чемпионат

В теннисном турнире участвуют n игроков. Турнир проходит по олимпийской системе: проигравший сразу выбывает. Два игрока могут сыграть друг с другом, если количество сыгранных ими матчей отличается не более чем на 1 (в любую сторону). Оба игрока должны были выиграть все свои предыдущие матчи. Определите, в каком максимальном количестве матчей может участвовать победитель турнира.

Обозначим $f(k)$ — минимальное количество игроков, при котором победитель может сыграть k матчей. Для $k = 1$ очевидно $f(1) = 2$ (нужен финальный матч). Для $k = 2$ победитель играет два матча: полуфинал и финал. В полуфинале он играет с игроком, у которого 0 или 1 матч (разница не более 1), а в финале — с игроком, у которого 1 матч. Минимальное количество игроков достигается, если оба участника финала имеют по 1 матчу, то есть каждый из них провёл полуфинал. Значит, нужно $f(1)+f(1)-1 = 2+2-1 = 3$ игрока. Итак, $f(2) = 3$.

Для $k \geq 3$ рассмотрим последний матч победителя. Его соперник по финалу должен был сыграть либо $k-1$, либо $k-2$ матча (разница не более 1). Чтобы минимизировать общее количество игроков, возьмём соперника с $k-2$ матчами (так как $f(k-2) \leq f(k-1)$). Тогда общее количество игроков равно $f(k-1) + f(k-2)$. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение:

$$f(k) = f(k-1) + f(k-2), \quad f(1) = 2,\ f(2) = 3.$$

Это числа Фибоначчи со сдвигом: $f(k) = F_{k+2}$, где $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

Для заданного n нужно найти максимальное k, такое что $f(k) \leq n$. Вычисляем последовательность $f(k)$ до тех пор, пока $f(k) \leq n$, и выводим k.

Формирование треугольников

У вас есть n палочек, длина i-й палочки равна 2^{a_i}. Нужно выбрать ровно 3 палочки, из которых можно составить невырожденный треугольник. Посчитать количество способов.

Общее количество способов выбрать 3 палочки равно $\binom{n}{3}$. Вычтем количество троек, из которых треугольник составить нельзя.

Для длин, являющихся степенями двойки, треугольник не получается, если самая длинная палочка не меньше суммы двух других. Поскольку $2^a + 2^b \leq 2^c$ при $a \leq b \leq c$ возможно только в двух случаях:

- $a = b$ и $c \geq a+1$ (тогда $2^a + 2^a = 2^{a+1} \leq 2^c$);
- $a < b$ и $c \geq b+1$ (тогда $2^a + 2^b \leq 2^b + 2^b = 2^{b+1} \leq 2^c$).

Таким образом, тройка не образует треугольник, если минимальная длина встречается хотя бы дважды и есть палочка длиннее, либо если все три длины различны и максимальная хотя бы на 1 больше средней.

Удобнее считать плохие тройки так: отсортируем палочки по длине. Для каждой длины x пусть $cnt[x]$ — количество палочек этой длины, а s — количество палочек с длиной строго больше x. Тогда все тройки, где минимальная длина равна x, а остальные две — любые из более длинных, являются плохими. Их количество равно $cnt[x] \cdot \binom{s}{2}$. Суммируем по всем x и вычитаем из общего числа.

Цифровой корень степени двойки

Цифровой корень числа — это результат многократного сложения его цифр до получения однозначного числа. Для заданного N найдите цифровой корень числа 2^N.

Цифровой корень числа x можно вычислить как $1 + ((x-1) \bmod 9)$ (при $x > 0$). Для $x = 0$ цифровой корень 0. Таким образом, задача сводится к нахождению $2^N \bmod 9$ (с учётом, что при остатке 0 цифровой корень 9, но для 2^N это невозможно, так как 2^N не делится на 9).

Последовательность $2^N \bmod 9$ имеет период 6:

$$2^0 \equiv 1,\ 2^1 \equiv 2,\ 2^2 \equiv 4,\ 2^3 \equiv 8,\ 2^4 \equiv 7,\ 2^5 \equiv 5,\ 2^6 \equiv 1, \ldots$$

Поэтому ответ определяется остатком N по модулю 6:

- $N \equiv 0 \pmod 6$: ответ 1
- $N \equiv 1 \pmod 6$: ответ 2
- $N \equiv 2 \pmod 6$: ответ 4
- $N \equiv 3 \pmod 6$: ответ 8
- $N \equiv 4 \pmod 6$: ответ 7
- $N \equiv 5 \pmod 6$: ответ 5

Последовательности И

Дан массив a длины n. Последовательность называется хорошей, если для всех i от 1 до $n-1$ выполняется $\mathrm{AND}(a_1, \ldots, a_i) = \mathrm{AND}(a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Найдите количество перестановок массива, которые являются хорошими.

Пусть $X = \mathrm{AND}(a_1, \ldots, a_n)$ — общее побитовое И всех элементов. Необходимым условием является то, что X является подмаской каждого элемента, то есть $a_i \& X = X$ для всех i. Иначе X не может быть получено как И всех элементов. Если это не выполняется, ответ 0.

Рассмотрим хорошую перестановку. Для $i = 1$ условие даёт $a_{p_1} = \mathrm{AND}(a_{p_2}, \ldots, a_{p_n}) = X$. Аналогично, для $i = n-1$ получаем $a_{p_n} = \mathrm{AND}(a_{p_1}, \ldots, a_{p_{n-1}}) = X$. Таким образом, первый и последний элементы перестановки должны быть равны X.

Обратно, если в перестановке первый и последний элементы равны X, а все элементы содержат X как подмаску, то для любого i имеем:

$$\mathrm{AND}(a_{p_1}, \ldots, a_{p_i}) = X \& (\text{И остальных}) = X,$$

так как $a_{p_1} = X$. Аналогично,

$$\mathrm{AND}(a_{p_{i+1}}, \ldots, a_{p_n}) = X \& (\text{И остальных}) = X,$$

поскольку $a_{p_n} = X$. Следовательно, условие выполняется для всех i.

Итак, хорошие перестановки — это в точности те, у которых на первом и последнем месте стоят элементы, равные X, а остальные элементы расположены в произвольном порядке.

Пусть cnt — количество элементов массива, равных X. Если $cnt < 2$, то таких перестановок нет, ответ 0. Иначе выбираем два элемента для концов: первый можно выбрать cnt способами, последний — $cnt - 1$ способами (порядок важен). Оставшиеся $n-2$ элемента можно переставить $(n-2)!$ способами. Таким образом, ответ:

$$cnt \cdot (cnt - 1) \cdot (n-2)! \pmod{10^9 + 7}.$$

Плей-офф

В турнире участвуют 2^n команд. На i-м этапе применяется правило s_i: 0 — выигрывает команда с меньшим навыком, 1 — с большим. Навыки команд — перестановка чисел $1, \dots, 2^n$. Для каждого x от 1 до 2^n определите, может ли команда с навыком x стать чемпионом при некотором распределении навыков.

Пусть r — количество единиц в строке s (этапов, где побеждает сильнейший). Чтобы команда с навыком x могла выиграть, она должна в каждом матче быть либо меньше, либо больше соперника в зависимости от правила. В турнирном дереве глубина n. Рассмотрим самый неблагоприятный случай: чтобы x было минимально возможным, нужно во всех раундах с правилом 1 ставить соперников с наименьшими навыками (тогда x должен быть больше их всех), а в раундах с правилом 0 — с наибольшими (тогда x должен быть меньше их всех). В итоге получается, что x не может быть меньше 2^r и не может быть больше $2^n - 2^{n-r} + 1$. При этом все значения в этом диапазоне достижимы. Таким образом, ответ — все целые x от 2^r до $2^n - 2^{n-r} + 1$.

Сжатая скобочная последовательность - легкая версия

Скобочная последовательность задана сжато: на нечётных позициях — количество подряд идущих '(', на чётных — количество ')'. Требуется найти количество подотрезков исходной последовательности, являющихся правильными скобочными последовательностями. Здесь $n \leq 1000$

Рассмотрим только отрезки, которые начинаются внутри открывающего блока и заканчиваются внутри закрывающего. Пусть i — номер открывающего блока (нечётный), j — номер закрывающего блока (чётный), $i \leq j$. Обозначим S — суммарный баланс всех полных блоков между i и j (с учётом знаков). Пусть $pref_{min}$ — минимальное значение префиксной суммы на отрезке от i до $j-1$ (без учёта выбранных частей). Тогда для того чтобы получить правильную скобочную последовательность, нужно выбрать x открывающих скобок из блока i ($1 \leq x \leq c_i$) и y закрывающих из блока j ($1 \leq y \leq c_j$) так, чтобы $x + S = y$ и баланс нигде не становился отрицательным. Это даёт ограничения: $x \geq \max(1, \mathrm{pref}_i - \mathrm{pref}_{min})$ и $x \leq \min(c_i, c_j - S)$. Перебираем все пары (i, j) за $O(n^2)$ и суммируем количество подходящих x.

Сжатая скобочная последовательность - сложная версия

Скобочная последовательность задана сжато: на нечётных позициях — количество подряд идущих '(', на чётных — количество ')'. Требуется найти количество подотрезков исходной последовательности, являющихся правильными скобочными последовательностями. Здесь $n \leq 10^6$

Будем обрабатывать блоки по порядку, поддерживая текущий баланс cur_bal. Для каждого открывающего блока (нечётный индекс) добавляем в стек узел, представляющий диапазон возможных балансов, которые могут быть началом будущей правильной последовательности: $[L, R] = [cur\_bal, cur\_bal + cnt - 1]$. Также узел хранит вес C — количество способов получить данный диапазон (обычно 1, но может накапливаться при объединении соседних узлов с $C = 1$ и непрерывными диапазонами).

При обработке закрывающего блока (чётный индекс) пытаемся сбалансировать его с имеющимися в стеке открытыми диапазонами, начиная с самого верхнего (ближайшего по позиции). Пусть cnt — количество закрывающих скобок в текущем блоке. Для каждого узла из стека вычисляем пересечение его диапазона $[L, R]$ с допустимыми значениями, которые могут быть сбалансированы текущим количеством закрывающих скобок. Добавляем к ответу произведение веса узла на количество таких значений. Уменьшаем cnt на количество использованных скобок и при необходимости обрезаем диапазон узла или удаляем его.

Если после обработки всех узлов cnt остаётся положительным, уменьшаем текущий баланс на оставшееся количество (это означает, что закрывающие скобки остались несбалансированными и не могут образовать правильную последовательность, начинающуюся раньше).

В конце выводим накопленный ответ. Время работы $O(n)$, так как каждый блок заходит в стек и выходит из него не более одного раза.

ПСП и пики

Правильная скобочная последовательность длины $2n$. Пик — позиция i, где $s_i =' ('$ и $s_{i+1} =')'$. Для заданных n и k найдите количество правильных скобочных последовательностей, содержащих ровно k пиков.

Количество таких последовательностей выражается числами Нараяны:

$$N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Рассмотрим путь Дика — ломаную из $(0,0)$ в $(2n,0)$ с шагами вверх '(' и вниз ')', не опускающуюся ниже нуля. Пик соответствует локальному максимуму: шаг вверх, затем шаг вниз. Известно, что количество путей Дика с k пиками равно $N(n,k)$. Формула получается из комбинаторной интерпретации: нужно выбрать k подъёмов, которые будут вершинами пиков, и $k-1$ спусков, которые будут окончаниями пиков, откуда и возникает произведение биномиальных коэффициентов. Деление на n связано с тем, что каждый путь можно циклически сдвинуть, и ровно n различных сдвигов дают один и тот же путь.

Так как $n \le 1000$, предвычисляем $dp[n][k]$, используя обратные элементы по модулю 10^9+7 для деления. Для каждого запроса выводим $dp[n][k]$.

Сумма по простым

Даны целые числа l и r. Для каждого простого p в $[l,r]$ определим $f(p) = \binom{2p}{p} \bmod p^3$. Найдите сумму $f(p)$ по всем простым p в отрезке.

Известна теорема Волстенхольма: для простого $p \ge 5$,

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$

Для $p=2$: $\binom{4}{2} = 6$, $6 \bmod 8 = 6$. Для $p=3$: $\binom{6}{3} = 20$, $20 \bmod 27 = 20$. Таким образом, для $p \ge 5$ вклад каждого простого равен 2. Для $p=2$ вклад 6, для $p=3$ вклад 20.

Значит, сумма равна $2 \cdot$ (количество простых в $[l,r]$) + поправка для $p = 2,3$. Количество простых на отрезке можно предподсчитать решетом Эратосфена за $O(r\log\log r)$ и затем отвечать на запросы с помощью префиксных сумм за $O(1)$.