Оглавление

Хоровод

Есть группа из x мальчиков и y девочек. Определить, можно ли составить хоровод из всех мальчиков и девочек в группе, в котором есть ровно m пар соседей разного пола.

Рассмотрим два случая:

1. Если $x = y$, то: - Максимальное количество пар достигается при полном чередовании: `BGBGBG...` или `GBGBGB...`. В этом случае $m_{\max} = x+y = 2x$. Минимальное количество пар достигается при расположении всех мальчиков подряд и всех девочек подряд: `BB...BGG...G`. В этом случае $m_{\min} = 2$. Любое чётное значение между 2 и $2x$ включительно достижимо.

2. Если $x \neq y$ (пусть $\min(x, y) = k$), то: - Максимальное количество пар: $m_{\max} = 2k$. Минимальное количество пар: $m_{\min} = 2$. Любое чётное значение между 2 и $2k$ включительно достижимо.

Количество пар всегда чётно, так как каждый блок детей одного пола создаёт ровно 2 пары с соседями другого пола.

Интересные прямоугольники - легкая версия

Найти количество различных (с точностью до поворота) прямоугольников $a \times b$ ($a, b \leq n$), которые можно разрезать на два прямоугольника целыми разрезами и сложить из них прямоугольник, отличный от исходного. Здесь $n \leq 2 \cdot 10^6$.

Пусть $a \leq b$. Рассмотрим несколько случаев:

- Если a чётно, то мы можем разрезать прямоугольник на два прямоугольника размера $\frac{a}{2} \times b$ и сложить из них прямоугольник $\frac{a}{2} \times 2b$, который точно отличается от $a \times b$.
- Если b чётно и $b \neq 2a$, то мы можем разрезать прямоугольник на два прямоугольника размера $a \times \frac{b}{2}$ и сложить из них прямоугольник размера $2a \times \frac{b}{2}$. Заметим, что здесь мы пользуемся тем, что $b \neq 2a$, так как если $b = 2a$, то мы получим такой же прямоугольник размера $b \times a$.
- Если a и b нечётные или $b = 2a$ и a нечётно, то прямоугольник не является интересным.

Легко понять, что если мы разрежем прямоугольник размера $a \times b$ на два прямоугольника размера $a \times c$ и $a \times d$, где $c \neq d$, то мы всегда сможем сложить только исходный прямоугольник (аналогично если мы разрежем на прямоугольники $c \times b$ и $d \times b$). А отсюда следует, что мы должны разделить одну из сторон прямоугольника пополам, поэтому хотя бы одна сторона должна быть чётной.

Для $n \leq 2 \cdot 10^6$ задачу можно решить за $O(n)$ прекомпиляцией. Заранее для каждого n от 1 до $2 \cdot 10^6$ посчитаем ответ. Используем формулу:

$$f(n) = f(n-1) + \text{количество новых интересных прямоугольников с максимальной стороной } n$$

где количество новых прямоугольников с $b = n$ равно:

$$\text{count\_new} = \begin{cases} n-1, & \text{если } n \text{ чётно и } \frac{n}{2} \text{ чётно} \\ n-2, & \text{если } n \text{ чётно и } \frac{n}{2} \text{ нечётно} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{если } n \text{ нечётно} \end{cases}$$

Интересные прямоугольники - сложная версия

Найти количество различных (с точностью до поворота) прямоугольников $a \times b$ ($a, b \le n$), которые можно разрезать на два прямоугольника целыми разрезами и сложить из них прямоугольник, отличный от исходного. Здесь $n \le 2 \cdot 10^9$.

Пусть $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ — количество нечётных чисел от 1 до n. Тогда количество интересных прямоугольников можно вычислить следующим образом: всего есть $\frac{n(n+1)}{2}$ различных прямоугольников, длины сторон которых не превосходят n. Вычтем из этого количества количество прямоугольников, у которых обе стороны нечётны. Это количество равно $\frac{x(x+1)}{2}$. После этого нужно вычесть те прямоугольники, у которых большая сторона равна удвоенной меньшей, и при этом меньшая сторона нечётная. Это количество равно $\left\lceil \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \right\rceil$, потому что в таком случае меньшая сторона не должна превышать $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, и при этом должна быть нечётной.

Получаем итоговую формулу:

$$\operatorname{ans}(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{x(x+1)}{2} - \left\lceil \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \right\rceil,$$

где $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ещё одна акция - легкая версия

Нужно купить хотя бы n кг картофеля. В понедельник цена a рублей за кг, действует акция: за каждые m купленных кг дают 1 кг бесплатно. Во вторник цена b рублей за кг, акции нет. Найти минимальную сумму. Здесь $n \le 10^6$.

Пусть мы покупаем в понедельник k кг (целое число). Тогда по акции получим $\lfloor k/m \rfloor$ кг в подарок. Всего с понедельника:

$$\text{total} = k + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$$

Если $\text{total} \ge n$, то вся покупка в понедельник обойдётся в $k \cdot a$. Если $\text{total} < n$, то недостающие $n - \text{total}$ кг докупаем во вторник по цене b, общая стоимость:

$$\operatorname{cost}(k) = k \cdot a + (n - \text{total}) \cdot b$$

Для каждого теста перебираем $k = 0, 1, \ldots, n$, вычисляем $\operatorname{cost}(k)$ по формуле выше, берём минимум.

* Если купить n кг в понедельник, то получим не меньше n кг (с подарками). Покупать больше n кг невыгодно: стоимость возрастёт, а дополнительные подарки уже не нужны. Поэтому оптимальное $k \le n$.

Ещё одна акция - сложная версия

Нужно купить хотя бы n кг картофеля. В понедельник цена a рублей за кг, действует акция: за каждые m купленных кг дают 1 кг бесплатно. Во вторник цена b рублей за кг, акции нет. Найти минимальную сумму. Здесь $n \le 10^9$.

Пусть $q = \lfloor n/(m+1) \rfloor$ — максимальное количество полных акций, $r = n - q \cdot (m+1)$.

1. Если акция выгодна ($a \cdot m \le b \cdot (m+1)$):

$$\text{ответ} = q \cdot \min(a \cdot m, b \cdot (m+1)) + r \cdot \min(a, b)$$

2. Если акция не выгодна ($a \cdot m > b \cdot (m+1)$):

$$\text{ответ} = n \cdot \min(a, b)$$

Суммы из отрезка - легкая версия

Найти максимальное целое положительное число, которое нельзя представить в виде суммы произвольного количества целых чисел из отрезка $[l, r]$. Если можно получить любое число, вывести -1. Здесь $l, r \leq 10^6$.

Если $l = 1$, то можно получить любое число: $1, 2, 3, \ldots$, поэтому ответ -1.

Для $l > 1$ рассмотрим ситуацию: число k представимо в виде суммы x чисел из отрезка, если выполняется $l \cdot x \leq k \leq r \cdot x$. Непредставимое число возникает тогда, когда для какого-то x: $r \cdot x < k < l \cdot (x+1)$, то есть x слагаемых мало, а $x + 1$ — много. См. Chicken McNugget theorem

Максимальный "пропуск"возникает при максимальном x, удовлетворяющем $r \cdot x + 1 < l \cdot (x + 1)$. Так как $l, r \leq 10^6$, наибольший x можно найти, перебирая соответствующие значения до какой-то константы и обновляя ответ, если текущий x удовлетворяет неравенству.

Максимальное непредставимое число: $l \cdot (x + 1) - 1$.

Суммы из отрезка - сложная версия

Найти максимальное целое положительное число, которое нельзя представить в виде суммы произвольного количества целых чисел из отрезка $[l, r]$. Если можно получить любое число, вывести -1. Здесь $l, r \leq 10^9$.

Если $l = 1$, то можно получить любое число: $1, 2, 3, \ldots$, поэтому ответ -1.

Для $l > 1$ рассмотрим ситуацию: число k представимо в виде суммы x чисел из отрезка, если выполняется $l \cdot x \leq k \leq r \cdot x$. Непредставимое число возникает тогда, когда для какого-то x: $r \cdot x < k < l \cdot (x+1)$, то есть x слагаемых мало, а $x + 1$ — много. См. Chicken McNugget theorem

Максимальный "пропуск"возникает при максимальном x, удовлетворяющем $r \cdot x + 1 < l \cdot (x+1)$. Решая неравенство:

$$r \cdot x + 1 < l \cdot x + l$$

$$(r - l) \cdot x < l - 1$$

$$x < \frac{l-1}{r-l}$$

Максимальный целый x: $x = \left\lfloor \frac{l-2}{r-l} \right\rfloor$. Максимальное непредставимое число: $l \cdot (x + 1) - 1$.

Урок физкультуры - легкая версия

Вася стоит на позиции n и получил номер x при расчёте на "первый-k-й". Нужно найти количество натуральных $k > 1$, удовлетворяющих условиям. Здесь $n \leq 10^5$.

Все номера повторяются через $2k - 2$ позиции. Номер на позиции n можно вычислить по формуле: сначала найдём остаток $a = n \bmod (2k - 2)$. Если $a = 0$, то это последняя позиция в периоде, что соответствует номеру 2. Если $a > k$, то номер находится в убывающей части периода и равен $2k - a$. Иначе номер равен a.

Таким образом, для каждого k от 2 до n вычисляем номер на позиции n и проверяем, равен ли он x. Если равен, увеличиваем счётчик ответа.

Урок физкультуры - сложная версия

Вася стоит на позиции n и получил номер x при расчёте на "первый-k-й". Нужно найти количество натуральных $k > 1$, удовлетворяющих условиям. Здесь $n \leq 10^9$.

Расчёт на "первый-k-й"имеет периодическую структуру с периодом $2k-2$. Последовательность номеров в периоде:

$$1, 2, 3, \ldots, k, k-1, k-2, \ldots, 2$$

Все номера повторяются через $2k-2$ позиции. Если у мальчика Васи номер при расчете равен x, то он может быть на позициях либо вида $(2k-2) \cdot t + x$, либо $(2k-2) \cdot t + k + k - x$, для каких-то неотрицательных t. Это верно для всех x, кроме $x = 1$ и $x = k$ — для этих значений остается только один вариант.

Давайте зафиксируем первый вариант. Нам нужно найти сколько различных k удовлетворяют равенству $(2k-2) \cdot t + x = n$, при некотором неотрицательном t. Это выполняется тогда и только тогда, когда $n - x$ делится на $2k - 2$. Поэтому нужно найти число чётных делителей числа $n - x$.

Чтобы рассмотреть второй случай нужно поступить аналогично с числом $n + x - 2$.

Лягушки

Три лягушки в точках $a < b < c$. Крайняя лягушка может прыгнуть в целочисленную точку между двумя другими. Найти минимальное и максимальное число прыжков до стабильного положения.

Минимальное число прыжков:

1. Если лягушки уже стоят подряд ($a + 1 = b$ и $b + 1 = c$): 0 прыжков
2. Если есть промежуток размера 2 ($a + 2 = b$ или $b + 2 = c$): 1 прыжок (третья лягушка прыгает между ними)
3. Иначе: 2 прыжка (можно сначала одной крайней прыгнуть, потом другой)

Максимального числа прыжков можно добиться, если сначала прыгнуть так, чтобы две лягушки оказались рядом, а третья — далеко. Тогда можно заставлять крайнюю лягушку прыгать через соседнюю максимальное число раз.

Максимальное количество прыжков равно $\max(b - a - 1, c - b - 1)$.

Двураскраски - легкая версия

Задана таблица из 2 строк и n столбцов. Каждая ячейка красится в черный (B) или белый (W) цвет. Две ячейки называются соседями, если они имеют общую сторону и одинаковый цвет. Компонента связности — это максимальное множество ячеек одного цвета, соединённых соседством. Раскраска называется красивой, если в ней ровно k компонент связности. Нужно найти количество красивых раскрасок по модулю 998244353. Здесь $n \leq 10$, $k \leq 2n$.

Для таблицы 2×n рассмотрим состояния столбцов. В каждом столбце 2 ячейки, поэтому есть 4 типа столбцов: тип 0: WW (обе белые), тип 1: WB (верх белый, низ черный), тип 2: BB (обе черные), тип 3: BW (верх черный, низ белый).

Используем динамическое программирование: $dp[n][state][comp]$ — количество раскрасок для n столбцов, заканчивающихся на состояние $state$, с $comp$ компонентами связности.

Базовый случай для $n = 1$: $dp[1][0][1] = 1$ (WW: 1 компонента), $dp[1][1][2] = 1$ (WB: 2 компоненты), $dp[1][2][1] = 1$ (BB: 1 компонента), $dp[1][3][2] = 1$ (BW: 2 компоненты).

При добавлении нового столбца с состоянием new к предыдущему столбцу с состоянием $prev$, количество компонент изменяется на $\Delta(prev, new)$. Правила вычисления Δ:

Если состояния одинаковы ($prev = new$): $\Delta = 0$ (все горизонтальные соединения сохраняются). Если нижние цвета одинаковы ($prev\%2 = new\%2$): $\Delta = 1 + (prev\%2)$, иначе: $\Delta = (new\%2)$

Ответ лежит в сумме $dp[n][state][k]$ по всем 4 состояниям $state$ для заданных n и k. То есть:

$$\text{answer}(n, k) = \sum_{state=0}^{3} dp[n][state][k]$$

Двураскраски - сложная версия

Задана таблица из 2 строк и n столбцов. Каждая ячейка красится в черный (B) или белый (W) цвет. Две ячейки называются соседями, если они имеют общую сторону и одинаковый цвет. Компонента связности — это максимальное множество ячеек одного цвета, соединённых соседством. Раскраска называется красивой, если в ней ровно k компонент связности. Нужно найти количество красивых раскрасок по модулю 998244353. Здесь $n \leq 1000$, $k \leq 2n$.

Для решения задачи используем динамическое программирование с более эффективной структурой состояний. Вместо рассмотрения всех 4 типов столбцов объединим их в две категории: столбцы, где обе ячейки одного цвета (одноцветные): типы WW и BB, и столбцы, где ячейки разного цвета (двуцветные): типы WB и BW.

Введем два массива: $f1[t][c]$ — количество раскрасок для t столбцов, заканчивающихся на одноцветный столбец, с c компонентами, и $f2[t][c]$ — количество раскрасок для t столбцов, заканчивающихся на двуцветный столбец, с c компонентами.

Начальные значения для одного столбца ($t = 1$): $f1[1][1] = 2$ (столбцы WW и BB, каждый дает 1 компоненту), $f2[1][2] = 2$ (столбцы WB и BW, каждый дает 2 компоненты).

Переходы от t столбцов к $t + 1$:

Переходы в одноцветный столбец: из одноцветного в тот же цвет: $f1[t][c] \to f1[t+1][c]$, из одноцветного в другой цвет: $f1[t][c-1] \to f1[t+1][c]$ (добавляется 1 компонента), из двуцветного в одноцветный: $2 \cdot f2[t][c] \to f1[t+1][c]$ (цвет выбирается так, чтобы число компонент не изменилось, есть 2 варианта). Формула: $f1[t+1][c] = f1[t][c] + f1[t][c-1] + 2 \cdot f2[t][c]$.

Переходы в двуцветный столбец: из одноцветного в двуцветный: $2 \cdot f1[t][c-1] \to f2[t+1][c]$ (добавляется 1 компонента, есть 2 варианта выбора цветов), из двуцветного в тот же тип: $f2[t][c] \to f2[t+1][c]$ (число компонент не меняется), из двуцветного в другой тип: $f2[t][c-2] \to f2[t+1][c]$ (добавляется 2 компоненты). Формула: $f2[t+1][c] = 2 \cdot f1[t][c-1] + f2[t][c] + f2[t][c-2]$.

Ответ лежит в сумме $f1[n][k] + f2[n][k]$. То есть:

$$\text{answer}(n, k) = f1[n][k] + f2[n][k]$$